

Distributivgesetz / Binomische Formeln

1. Distributivgesetz

Auflösen von Klammern: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiele: $5 \cdot (a + b) - 2 \cdot (a - 4b) = 5a + 5b - 2a + 8b = 3a + 13b$ $-(3a - 2b) = -3a + 2b$

Sind mehrere Klammern geschachtelt, werden die Klammern von innen nach außen aufgelöst.

Beispiel: $4 \cdot (3x - (4y + 3)) = 4 \cdot (3x - 4y - 3) = 12x - 16y - 12$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Beispiele: $(2 + x) \cdot (y - 3) = 2 \cdot y + 2 \cdot (-3) + x \cdot y + x \cdot (-3)$

$$(2x^2 + x - 1) \cdot (x - 3) = 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot (-3) + x \cdot x + x \cdot (-3) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-3)$$

Ausklammern ist die Umkehrung zum Auflösen von Klammern. Faktoren, die in jedem Summanden enthalten sind, können ausgeklammert werden.

Beispiele: $7x + 7y = 7 \cdot (x + y)$ $2x^3y^2 - 6x^2y^2 + 2xy^2 = 2xy^2(x^2 - 3x + 1)$

2. Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Beispiele: $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

$$(2x + 4y) \cdot (2x - 4y) = 4x^2 - 16y^2$$

Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln:

Überprüfen Sie anschließend durch Ausmultiplizieren, ob das Binom korrekt ist.

Beispiel 1: $x^2 + 6x + 9$ Ziehen Sie jeweils aus dem ersten und letzten Summanden

die Wurzel: $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{9} = 3$ Als Lösung kommt nur $(x + 3)^2$ in Frage.

Überprüfen Sie durch Ausmultiplizieren, ob das Binom korrekt ist:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 = x^2 + 6x + 9 \checkmark$$

Beispiel 2: $x^2 - 3x + 4$ $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{4} = 2$; $(x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 = x^2 - 4x + 4 \neq x^2 - 3x + 4$

Eine Faktorisierung ist hier also nicht möglich.

Beispiel 3: $x^2 - 16$ Da nur zwei Summanden vorhanden sind, kommt nur die dritte

binomische Formel in Frage: $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{16} = 4$; $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

Übungsaufgaben

1. Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen!

a) $(6b-3a)-(8a+7b)+(2b+6a)-(a-10-b)$

b) $(7x-2y)-(8x+8y)+(3x+9y)-(2x-12-y)$

c) $42a-(39b-(2a-3b)-(14a-(17b-a)))$

d) $15(2(a+b-c))+4(a-b-c)-18(a-b-c)+32a$

e) $(8u-3v)(12v-\frac{1}{2}u)$ f) $(3a^2+2a-1)(2a-1)$ g) $(1,2x-1,5y)^2$

h) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)$ i) $(x^2+3)^2$ j) $\left(\frac{1}{3}a^2b^3-6a^2b\right)^2$ k) $(0,5x+2y)(0,5x-2y)$

2. Klammern Sie aus!

a) $4x+xy$ b) $24xy^3+18yz^2$ c) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ d) $\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{8}$ e) $12a^3bx^2-3ab^2x^3-6ab^2x^2$

3. Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln!

a) u^2-4 b) $9a^2-6ab+b^2$ c) $0,25x^2+x+1$ d) $\frac{1}{11}a^2+\frac{1}{11}ab+\frac{1}{44}b^2$ e) z^2-1

Lösungen

1. a) $(6b-3a)-(8a+7b)+(2b+6a)-(a-10-b) = 6b-3a-8a-7b+2b+6a-a+10+b = -6a+2b+10$

b) $(7x-2y)-(8x+8y)+(3x+9y)-(2x-12-y) = 7x-2y-8x-8y+3x+9y-2x+12+y = 12$

c) $42a-(39b-(2a-3b)-(14a-(17b-a))) = 42a-(39b-2a+3b-(14a-17b+a)) = 42a-(39b-2a+3b-14a+17b-a) = 42a-39b+2a-3b+14a-17b+a = 59a-59b$

d) $15(2(a+b-c))+4(a-b-c)-18(a-b-c)+32a = 15(2a+2b-2c+4a-4b-4c)-18a+18b+18c+32a = 30a+30b-30c+60a-60b-60c-18a+18b+18c+32a = 104a-12b-72c$

e) $(8u-3v)(12v-\frac{1}{2}u) = 96uv-4u^2-36v^2+1,5uv = -4u^2+97,5uv-36v^2$

f) $(3a^2+2a-1)(2a-1) = 6a^3-3a^2+4a^2-2a-2a+1 = 6a^3+a^2-4a+1$

g) $(1,2x-1,5y)^2 = (1,2x)^2-2\cdot 1,2x\cdot 1,5y+(1,5y)^2 = 1,44x^2-3,6xy+2,25y^2$

h) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right) = \frac{1}{4}x^3-x^2-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x-2 = \frac{1}{4}x^3-\frac{9}{8}x^2+x-2$

i) $(x^2+3)^2 = (x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 3+3^2 = x^4+6x^2+9$

j) $\left(\frac{1}{3}a^2b^3-6a^2b\right)^2 = \left(\frac{1}{3}a^2b^3\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}a^2b^3\cdot 6a^2b+(6a^2b)^2 = \frac{1}{9}a^4b^6-4a^4b^4+36a^4b^2$

k) $(0,5x+2y)(0,5x-2y) = (0,5x)^2-(2y)^2 = 0,25x^2-4y^2$

2. a) $4x+xy = x(4+y)$ b) $24xy^3+18yz^2 = 6\cdot 4\cdot x\cdot y\cdot y^2+3\cdot 6\cdot y\cdot z^2 = 6y(4xy^2+3z^2)$

c) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2+1)$ d) $\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{8} = \frac{x^2\cdot x^2}{4\cdot 2}-\frac{x^2\cdot x}{4}+\frac{x^2\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{x^2}{4}\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)$ e) $3abx^2(4a^2-bx-2b)$

3. a) $u^2-4 = (u+2)(u-2)$ b) $9a^2-6ab+b^2 = (3a-b)^2$ c) $0,25x^2+x+1 = (0,5x+1)^2$

d) $\frac{1}{11}a^2+\frac{1}{11}ab+\frac{1}{44}b^2 = \frac{1}{11}\left(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right) = \frac{1}{11}\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$ e) $z^2-1 = (z+1)(z-1)$