

Lineare Gleichungen / Bruchgleichungen

<p>1. $3x - 13 = 72 - 2x \mid +13$ $3x = 85 - 2x \mid +2x$ $5x = 85 \quad \mid :5$ $x = 17$ $\mathbb{L} = \{17\}$</p>	<p>Summanden mit Faktor x auf einer Seite der Gleichung isolieren, ggfs. zusammenfassen. Division durch den Koeffizienten von x. (Der Koeffizient von x ist der Faktor vor x) Angabe der Lösungsmenge.</p>
<p>2. $-9x + 8 + 3x^2 = (3 - x)(8 - 3x)$ $-9x + 8 + 3x^2 = 24 - 9x - 8x + 3x^2 \mid -3x^2$ $-9x + 8 = 24 - 17x \quad \mid +17x \mid -8$ $8x = 16 \quad \mid :8$ $x = 2 \quad \mathbb{L} = \{2\}$</p>	<p>Ausmultiplizieren der Klammern, weiter wie in Beispiel 1.</p>
<p>3. $\frac{3x+2}{4} = x - \frac{1}{2} \quad \mid \cdot 4 \cdot 2$ $\frac{(3x+2) \cdot 4 \cdot 2}{4} = x \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 2}{2} \mid \text{kürzen}$ $(3x+2) \cdot 2 = 8x - 4 \mid -3x^2$ $6x + 4 = 8x - 4 \quad \mid -8x \mid -4$ $-2x = -8 \quad \mid :(-2)$ $x = 4 \quad \mathbb{L} = \{4\}$</p>	<p>Multiplikation jedes Summanden mit dem Hauptnenner. Die Nenner können dann gekürzt werden.</p>
<p>4. $\frac{x}{x-8} = \frac{x-6}{x-11} \mid \cdot (x-8) \cdot (x-11) \mid \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{8; 11\}$ $\frac{x \cdot (x-8) \cdot (x-11)}{x-8} = \frac{(x-6) \cdot (x-8) \cdot (x-11)}{x-11}$ $x \cdot (x-11) = (x-6) \cdot (x-8)$ $x^2 - 11x = x^2 - 8x - 6x + 48 \mid -x^2$ $-11x = -14x + 48 \quad \mid +14x$ $3x = 48 \quad \mid :3$ $x = 16 \quad \mathbb{L} = \{16\}$</p>	<p>Steht im Nenner die Variable x, muss zunächst der Definitionsbereich \mathbb{D} eingeschränkt werden. x darf nicht 8 oder 11 sein, da sonst im Nenner eine 0 stünde. Das Teilen durch 0 ist aber nicht definiert. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{8; 11\}$ bedeutet: Der Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen vermindert um 8 und 11.</p>
<p>5. $\frac{x-2}{x-4} = 4 - \frac{x-6}{x-4} \mid \cdot (x-4) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ $\frac{(x-2) \cdot (x-4)}{x-4} = 4 \cdot (x-4) - \frac{(x-6) \cdot (x-4)}{x-4}$ $x - 2 = 4x - 16 - (x - 6)$ $x - 2 = 4x - 16 - x + 6$ $x - 2 = 3x - 10 \quad \mid +2 \mid -3x$ $-2x = -8 \quad \mid :(-2)$ $x = 4 \quad \mathbb{L} = \{ \}$</p>	<p>Der Definitionsbereich enthält alle reellen Zahlen außer 4, d.h. alle Zahlen außer 4 dürfen Lösung der Gleichung sein. Da die Lösung der Gleichung $x=4$ liefert, ist die Lösungsmenge leer.</p>
<p>6. $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{10x} \mid \cdot 2 \cdot 5 \cdot x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x}{2x} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x}{5x} = \frac{11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x}{10x}$ $5 + 6 = 11$ $11 = 11 \quad \mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$</p>	<p>Der Definitionsbereich enthält alle reellen Zahlen außer 0, d.h. alle Zahlen außer 0 dürfen Lösung der Gleichung sein. Die Aussage $11=11$ ist für alle x wahr, also enthält die Lösungsmenge alle Zahlen des Definitionsbereichs.</p>

Übungsaufgaben

Lösen Sie die Gleichungen, geben Sie jeweils die Definitions- und Lösungsmenge an!

- a) $312 = 12x + 15 - x$ b) $-\frac{12}{5} + x = \frac{11}{5}$ c) $\frac{1}{2}y - 1 = -\frac{2}{3}y + 6$ d) $7(2x + 5) = \frac{1}{2}(3x + 10)$
 e) $(27 - x)(6x - 5) = (2x + 11)(5 - 3x)$ f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 4$ g) $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + (2x - 9)^2 - (x - 6)(6x - 7) = 0$
 h) $\frac{3x + 4}{4} = \frac{2x - 12}{8}$ i) $6 - \frac{x + 2}{3} - \frac{3x - 4}{4} + \frac{2x - 2}{5} - 1 = \frac{3x - 1}{5}$ j) $\frac{4}{x - 3} = 2$
 k) $\frac{23 - x}{x} - \frac{3}{4x} = \frac{21}{x} + \frac{11}{4}$ l) $\frac{3}{x - 2} = \frac{1}{x - 4}$ m) $\frac{6}{x + 5} - \frac{2x + 60}{x^2 - 25} = -\frac{7}{x - 5}$

Lösungen

- a) $312 = 12x + 15 - x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $312 = 11x + 15$
 $297 = 11x$
 $27 = x \quad \mathbb{L} = \{27\}$
- b) $-\frac{12}{5} + x = \frac{11}{5} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $-12 + 5x = 11$
 $5x = 23$
 $x = \frac{23}{5} \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{23}{5} \right\}$
- c) $\frac{1}{2}y - 1 = -\frac{2}{3}y + 6 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $3y - 6 = -4y + 36$
 $7y = 42$
 $y = 6 \quad \mathbb{L} = \{6\}$
- d) $7(2x + 5) = \frac{1}{2}(3x + 10) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $14(2x + 5) = (3x + 10)$
 $28x + 70 = 3x + 10$
 $25x = -60$
 $x = -\frac{12}{5} \quad \mathbb{L} = \left\{ -\frac{12}{5} \right\}$
- e) $(27 - x)(6x - 5) = (2x + 11)(5 - 3x) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $162x - 135 - 6x^2 + 5x = 10x - 6x^2 + 55 - 33x$
 $167x - 135 = -23x + 55$
 $190x = 190$
 $x = 1 \quad \mathbb{L} = \{1\}$
- f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $3x + 2x = 24$
 $5x = 24$
 $x = \frac{24}{5} \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{24}{5} \right\}$
- g) $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + (2x - 9)^2 - (x - 6)(6x - 7) = 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $x^2 - 12x + 36 + x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 36x + 81 - (6x^2 - 7x - 36x + 42) = 0$
 $x^2 - 12x + 36 + x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 36x + 81 - 6x^2 + 7x + 36x - 42 = 0$
 $-13x + 91 = 0$
 $-13x = -91$
 $x = 7 \quad \mathbb{L} = \{7\}$
- h) $\frac{3x + 4}{4} = \frac{2x - 12}{8} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $2 \cdot (3x + 4) = 2x - 12$
 $6x + 8 = 2x - 12$
 $4x = -20$
 $x = -5 \quad \mathbb{L} = \{-5\}$
- i) $6 - \frac{x + 2}{3} - \frac{3x - 4}{4} + \frac{2x - 2}{5} - 1 = \frac{3x - 1}{5} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
 $6 \cdot 60 - 20(x + 2) - 15(3x - 4) + 12(2x - 2) - 1 \cdot 60 = 12(3x - 1)$
 $360 - 20x - 40 - 45x + 60 + 24x - 24 - 60 = 36x - 12$
 $296 - 41x = 36x - 12$
 $-77x = -308$
 $x = 4 \quad \mathbb{L} = \{4\}$
- j) $\frac{4}{x - 3} = 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 $4 = 2 \cdot (x - 3)$
 $4 = 2x - 6$
 $10 = 2x$
 $x = 5 \quad \mathbb{L} = \{5\}$
- k) $\frac{23 - x}{x} - \frac{3}{4x} = \frac{21}{x} + \frac{11}{4} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $4 \cdot (23 - x) - 3 = 21 \cdot 4 + 11 \cdot x$
 $92 - 4x - 3 = 84 + 11x$
 $5 = 15x$
 $x = \frac{1}{3} \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$
- l) $\frac{3}{x - 2} = \frac{1}{x - 4} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$
 $3(x - 4) = 1 \cdot (x - 2)$
 $3x - 12 = x - 2$
 $2x = 10$
 $x = 5 \quad \mathbb{L} = \{5\}$
- m) $\frac{6}{x + 5} - \frac{2x + 60}{x^2 - 25} = -\frac{7}{x - 5} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{5; -5\}$ (Beachte: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$)
 $6(x - 5) - (2x + 60) = -7(x + 5)$
 $6x - 30 - 2x - 60 = -7x - 35$
 $11x = 55$
 $x = 5 \quad \mathbb{L} = \{ \}, \text{ s. Definitionsbereich!}$