

Potenzrechnung

Definition: a^n heißt **Potenz** und bedeutet, dass die **Basis a** n-mal mit sich selbst multipliziert wird. n heißt **Exponent**.

$$a^1 := a \quad a^0 := 1 \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Das Zeichen $:=$ bedeutet: „wird definiert als“. Dass diese Definitionen sinnvoll sind, ergibt sich aus den Beispielen zu 2. .

$$\text{Beispiele: } 5^0 = 1 \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Regel: Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung!

1. Addition und Subtraktion von Potenzen

Es können nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\text{Beispiele: } 5a^2 + 3a^2 = 8a^2 \quad p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p+q) \cdot a^n$$

2. Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{1. Potenzgesetz}$$

$$\text{Beispiel: } x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{2. Potenzgesetz}$$

$$\text{Beispiele: } \frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2 \quad \frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2} \stackrel{s. Def.}{=} \frac{1}{x^2} \quad \frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0 \stackrel{s. Def.}{=} 1$$

3. Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{3. Potenzgesetz}$$

$$\text{Beispiel: } 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{4. Potenzgesetz}$$

$$\text{Beispiele: } \frac{4^3}{8^3} = \left(\frac{4}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \stackrel{s. Def.}{=} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = 1 \cdot \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

4. Potenzieren von Potenzen

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m \quad \text{5. Potenzgesetz}$$

$$\text{Beispiel: } (10^3)^4 = 10^{3 \cdot 4} = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$$

Übungsaufgaben

Berechnen Sie!

- 1) $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ 3) 0^3 4) 1^{10} 5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ 6) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$ 7) 1^{-10} 8) $(-2)^6$ 9) -2^6
 10) $-(-2)^6$ 11) $(-2)^{-6}$ 12) $-(-2)^{-6}$ 13) $4x^5 + 3x^5$ 14) $3x^3 + 3x^2$ 15) $x^m - 2x^m$
 16) $5(a+b)^3 + 3(a+b)^3$ 17) $x^3 \cdot x^5$ 18) $a^n \cdot a$ 19) $x^3 \cdot x^{-5}$ 20) $a^{n-3} \cdot a^{3-n}$ 21) $4a^2 \cdot 5a^4$
 22) $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$ 23) $\frac{x^3 \cdot y^6}{x \cdot y^7}$ 24) $4 \cdot 3^2$ 25) $2^4 \cdot 5^4$ 26) $\frac{15^{-4}}{5^{-4}}$ 27) $\frac{(a^2 - b^2)^4}{(a-b)^4}$ 28) $\frac{(2a)^n}{a^n}$
 29) $\left(\frac{3a}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{9a}{2}\right)^{-n}$ 30) $(2^3)^2$ 31) $((-2)^3)^2$ 32) $-((-2)^3)^2$ 33) $(-2^2)^3$ 34) $(-2^2)^{-3}$
 35) $\frac{4+x^2}{x^8} - \frac{1}{x^6}$ 36) $\frac{1-a^2}{a^6} + \frac{1+a}{a^4} - \frac{1}{a^3}$ 37) $\frac{a^0}{a^{-2}}$ 38) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot 4$ 39) $4^0 \cdot 4^{-3}$

Lösungen (Teilweise sind mehrere Lösungswege möglich)

- 1) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1^2}{10^2} = \frac{1}{100}$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ 3) $0^3 = 0$ 4) $1^{10} = 1$ 5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \stackrel{s. Bsp. zu 4. PG}{=} \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$
 6) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{1}\right)^2 = 100$ 7) $1^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = 1$ 8) $(-2)^6 = 64$ 9) $-2^6 = -64$ 10) $-(-2)^6 = -64$
 11) $(-2)^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ 12) $-(-2)^{-6} = -\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}$ 13) $4x^5 + 3x^5 = 7x^5$ 14) $3x^3 + 3x^2$
 (Addition nicht möglich) 15) $x^m - 2x^m = -x^m$ 16) $5(a+b)^3 + 3(a+b)^3 = 8(a+b)^3$
 17) $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$ 18) $a^n \cdot a = a^{n+1}$ 19) $x^3 \cdot x^{-5} = x^{-2}$ 20) $a^{n-3} \cdot a^{3-n} = a^{(n-3)+(3-n)} = a^0 = 1$
 21) $4a^2 \cdot 5a^4 = 20a^6$ 22) $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}} = a^{(n+1)-(n-1)} = a^{n+1-n+1} = a^2$ 23) $\frac{x^3 \cdot y^6}{x \cdot y^7} = \frac{x^2}{y}$ oder $x^2 y^{-1}$
 24) $4 \cdot 3^2 = 36$ 25) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10.000$ 26) $\frac{15^{-4}}{5^{-4}} = \left(\frac{15}{5}\right)^{-4} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
 27) $\frac{(a^2 - b^2)^4}{(a-b)^4} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a-b}\right)^4 \stackrel{Binom!}{=} \left(\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}\right)^4 = (a+b)^4$ 28) $\frac{(2a)^n}{a^n} = \left(\frac{2a}{a}\right)^n = 2^n$
 29) $\left(\frac{3a}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{9a}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{3a}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{9a}\right)^n = \left(\frac{3a \cdot 2}{4 \cdot 9a}\right)^n = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ 30) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
 31) $((-2)^3)^2 = (-2)^{3 \cdot 2} = 64$ 32) $-((-2)^3)^2 = -(-2)^{3 \cdot 2} = -64$ 33) $(-2^2)^3 = (-4)^3 = -64$ (der
 Exponent 2 gilt nicht für das Minuszeichen!) 34) $(-2^2)^{-3} = (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$
 35) $\frac{4+x^2}{x^8} - \frac{1}{x^6} \stackrel{Erweitern!}{=} \frac{4+x^2}{x^8} - \frac{1 \cdot x^2}{x^6 \cdot x^2} = \frac{4+x^2}{x^8} - \frac{x^2}{x^8} = \frac{4}{x^8}$
 36) $\frac{1-a^2}{a^6} + \frac{1+a}{a^4} - \frac{1}{a^3} = \frac{1-a^2}{a^6} + \frac{(1+a) \cdot a^2}{a^4 \cdot a^2} - \frac{1 \cdot a^3}{a^3 \cdot a^3} = \frac{1-a^2}{a^6} + \frac{a^2+a^3}{a^6} - \frac{a^3}{a^6} = \frac{1}{a^6}$
 37) $\frac{a^0}{a^{-2}} = a^{0-(-2)} = a^2$ 38) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 \stackrel{s. Def.}{\cdot} 4 = 1 \cdot 4 = 4$ 39) $4^0 \cdot 4^{-3} = 1 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$